Convexe puntverzamelingen

Stoelinga, Theodorus Gerbrandus Dominicus

Publication date:
1932

INLEIDING

In deze inleiding zullen wij de door ons gebruikte definitie's geven van verschillende der voorkomende begrippen en daarna een kort overzicht van de inhoud der volgende hoofdstukken.

Een puntverzameling W is een deelverzameling van de puntverzameling V, als ieder punt van W tot V behoort.

Onder de doorsnede van eenige puntverzamelingen verstaan wij de verzameling der punten, die tot al die verzamelingen behooren.

Een punt P is inwendig punt van een verzameling V, indien een positief getal p bestaat, zoodanig, dat de verzameling V alle punten bevat, welker afstanden tot P kleiner dan p zijn. Een inwendig punt eener verzameling behoort dus tot die verzameling.

Een punt P is uitwendig punt van een verzameling V, indien een positief getal p bestaat, zoodanig, dat de verzameling V geen enkel punt bevat, welks afstand tot P kleiner dan p is. Een uitwendig punt van een verzameling behoort dus niet tot die verzameling.

Een punt P heet verdichtingspunt van een verzameling V, indien bij ieder positief getal p een van P verschillend punt van V behoort, welks afstand tot P kleiner dan p is.

Een punt P, dat geen inwendig en ook geen uitwendig punt van de verzameling V is, heet grenspunt van V. Behoort het grenspunt P van V tot V, dan heet het een randpunt van V. Een randpunt van V is dus verdichtingspunt van de verzameling der punten, die niet tot V behooren; een grenspunt van V, dat niet tot V behoort, is verdichtingspunt van V.

De verzameling der grenspunten van de verzameling V heet de grens van V; behoort die grens geheel tot V, dan heet zij de rand van V.

Een punt P heet geïsoleerd punt van een verzameling V, als het tot V behoort en een positief getal p bestaat, zoodanig, dat geen van P verschillend punt van V bestaat, waarvan de afstand tot P kleiner dan p is. Een geïsoleerd punt van V is dus tevens randpunt van V.

Een gesloten verzameling bevat al haar grenspunten, een open verzameling bevat geen enkel harer grenspunten, of ook: elk grenspunt van een gesloten verzameling is een randpunt, terwijl een open verzameling geen randpunten, maar enkel inwendige punten bezit. Een gesloten verzameling is dus daardoor gekenmerkt, dat ze al haar verdichtingspunten bevat, een open verzameling daardoor, dat ze niet al haar verdichtingspunten bevat.

Een n-dimensionale verzameling heet begrensd, indien een n-dimensionale maatpolytoop bestaat, in welks inwendige alle punten van V gelegen zijn.

Een samenhangende verzameling V is een verzameling, waarvan elk tweetal punten door een Jordankromme te verbinden is, zoo, dat alle punten van die Jordankromme tot V behooren.

Een leege verzameling is een niet-bestaande verzameling.

Een lineaire ruimte van n afmetingen stellen wij voor door het symbool R_n, tenzij anders is aangegeven. R_0 is een punt.

Indien een ruimte R_n een puntverzameling V en een ruimte R_{n-1} bevat, dan zullen wij zeggen, dat R_{n-1} de verzameling V splitst, als in R_n aan weerszijden van R_{n-1} punten van V gelegen zijn.

Wij zeggen, dat een punt P tusschen twee punten A en B in ligt, als P op de verbindingslijn dier punten tusschen A en B in gelegen is.

Als definitie eener convexe puntverzameling kiezen wij de volgende: een puntverzameling heet convex, als elk tot die verzameling behoorend puntenpaar de eigenschap bezit, dat het lijnsegment, hetwelk die twee punten verbindt, geheel tot de beschouwde verzameling behoort. Een leege verzameling is dus convex; een uit één punt bestaande verzameling eveneens. Men merke op, dat in deze definitie van convexiteit niet opgesloten zit, dat de verzameling gesloten is; het inwendige van een rechthoek bijvoorbeeld is convex. Wellicht ware de naam „nergens-concaaf" beter, maar wij verkiezen de benaming „convex" wegens haar eenvoud. Behalve bovenstaande definitie komen in de litteratuur nog andere voor. In hoofdstuk I wordt aangetoond de aequivalentie van onze definitie met de volgende: een puntverzameling heet convex, als een rechte daarmee hoogstens één punt of één interval of segment gemeen heeft. Deze definitie wordt door MINKOWSKI en door BRUNN gebruikt, maar uitsluitend voor begrensde, gesloten verzamelingen. Van verschillende andere definitie's wordt aangegeven in hoeverre ze overeenstemmen en in hoeverre ze afwijken. Tevens wordt in datzelfde hoofdstuk, in stelling 1, afgeleid een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat een in R_n geplaatste verzameling V convex zij, n.l. dat door elk in R_n gelegen punt, hetwelk geen inwendig punt van V is, een in R_n gelegen ruimte R_{n-1} aangebracht kan worden, die V niet splitst en met V een convexe puntverzameling gemeen heeft.

In hoofdstuk II worden stellingen behandeld, die betrekking hebben op een in R_n geplaatste convexe puntverzameling V en een ruimte R_{n-1}, die V niet splitst. O.a. vinden wij in stelling 4, dat een begrensde, gesloten, convexe verzameling in het inwendige van een tweeruimtenhoek ligt en toonen wij in stelling 5 aan, dat ook de definitie van convexiteit, door WOLFF gebruikt voor begrensde, gesloten, vlakke puntverzamelingen — en die luidt: een begrensde, gesloten, vlakke puntverzameling V is convex, als elk punt buiten V, in het vlak van V gelegen, hoekpunt is van een inspringende hoek, die V bevat — met de onze aequivalent is.

Een ruimte R_{n-1}, die door een grenspunt van een in R_n geplaatste puntverzameling V aangebracht is en V niet splitst, noemen we een raakruimte aan V. Uit hoofdstuk I weten we, dat door ieder grenspunt van een convexe verzameling een raakruimte aan die convexe verzameling is aan te brengen; in stelling 8 onderzoeken we de doorsnede van die raakruimte met de verzameling.

Hoofdstuk III bevat als voornaamste resultaat stelling 11: De eerste middelwaardestelling der integraalrekening kan aldus geformuleerd worden: een convexe puntverzameling met positieve massa bevat haar eigen zwaartepunt. Verder wordt in de stellingen

14 en 15 een uitbreiding behandeld van die middelwaardestelling, een uitbreiding, die veel overeenkomst vertoont met een theorema, dat door ERRERA gepubliceerd is. Stelling 15 luidt als volgt:

Indien voldaan is aan de volgende voorwaarden:

1) De functie's $f(P)$, $g(P)$, $X_1(P), \dots, X_N(P)$, $(N \geqq 1)$, zijn alle sommeerbaar over een meetbare verzameling E, zoodat de integralen

$$m = \int_E f(P)\, dw, \qquad M_h = \int_E f(P)\, X_h(P)\, dw,$$
$$(h = 1, 2, \dots, N)$$

$$m^* = \int_E f(P)\, g(P)\, dw, \qquad M_h^* = \int_E f(P)\, g(P)\, X_h(P)\, dw$$
$$(h = 1, 2, \dots, N)$$

bestaan.

2) Op E is $f(P)$ steeds $\geqq 0$, of steeds $\leqq 0$, terwijl $m \neq 0$ en $m^* \neq 0$ is.

3) Op E is elk der functie's $X_h(P)$ $(h = 1, 2, \dots, N)$ gelijkgezind met $g(P)$.

Dan gelden voor de punten

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \text{ en } \xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_N^*),$$

gedefinieerd door de betrekkingen

$$m = \xi_h M_h, \qquad m^* = \xi_h^* M_h^*,$$
$$(h = 1, 2, \dots, N)$$

de ongelijkheden

$$\xi_h^* \geqq \xi_h, \text{ indien } m^* > 0 \text{ is,}$$

en de ongelijkheden

$$\xi_h^* \leqq \xi_h, \text{ indien } m^* < 0 \text{ is.}$$

($g(P)$ en $X(P)$ heeten op E gelijkgezind, als in E geen puntenpaar P, Q met

$$g(P) > g(Q), \qquad X(P) < X(Q) \text{ bestaat}).$$

In hoofdstuk IV voeren wij in het begrip: convex omhulsel van een puntverzameling; dat is de kleinste convexe puntverzameling, die de beschouwde verzameling bevat. Bewezen wordt in stelling 16, dat iedere puntverzameling een convex omhulsel bezit. Wij weten wel, dat tegen de benaming: convex omhulsel bezwaren in te brengen zijn; het spraakgebruik beschouwt in de regel het omhulde niet als deel van het omhulsel, terwijl hier de oorspronkelijke verzameling juist steeds een deel van het convexe omhulsel is. Wij zouden deze naam dan ook niet gekozen hebben, indien het niet gedaan ware naar analogie van de door CARATHÉODORY ingevoerde, thans internationaal gebruikelijke uitdrukking: gesloten omhulsel (abgeschlossene Hülle) eener verzameling, waaronder verstaan wordt, de kleinste gesloten verzameling, die de beschouwde verzameling bevat. Trouwens, zoowel bij CARATHÉODORY [1]) als bij HAUSDORFF [2]) komt de term: konvexe Hülle voor in dezelfde beteekenis, met deze beperking, dat CARATHÉODORY uitsluitend begrensde, gesloten verzamelingen behandelt.

In dit hoofdstuk leiden we enkele eigenschappen van het convexe omhulsel af, b.v.: Van een open puntverzameling is ook het convexe omhulsel open (stelling 19) en: Een begrensde, gesloten puntverzameling heeft een begrensd, gesloten, convex omhulsel (stelling 23).

Om enkele eigenschappen van het convexe omhulsel gemakkelijker te kunnen formuleeren, noemen wij, als in R_n een aantal punten $x_\mu = (x_{\mu,1}, x_{\mu,2}, \ldots, x_{\mu,n})$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ gegeven zijn, elk punt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, waarvan de coördinaten in de gedaante

$$\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu x_{\mu,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gebracht kunnen worden, waarin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ getallen $\geqq 0$, met

$$\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu = 1$$

voorstellen, een centrum der gegeven punten x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$.

1) C. CARATHÉODORY, Über den Variabilitätsbereich u.s.w. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXXII, 1911.

2) HAUSDORFF, Mengenlehre, 2. Aufl., 1927.

Bewezen wordt in stelling 22, dat elk punt van het convexe omhulsel eener in R_n gelegen puntverzameling V centrum van $n + 1$ tot V behoorende punten is. Is V samenhangend, dan is, zooals uit stelling 25 blijkt, elk punt van het convexe omhulsel zelfs centrum van n punten van V. Voorts worden afgeleid voldoende voorwaarden, opdat elk punt van het convexe omhulsel eener puntverzameling V centrum van minder dan n punten van V worde.

Tenslotte bespreken we in hoofdstuk V de onderlinge ligging van twee en meer convexe puntverzamelingen in R_n. O.a. bewijzen we in stelling 30: Indien de convexe verzamelingen A, B en C, die in R_n liggen en alle niet-leeg zijn, twee aan twee genomen geen punt gemeen hebben, dan is het mogelijk drie lineaire veeltermen, l_1, l_2 en l_3, met bestaanbare coëfficiënten, die niet alle gelijk aan nul zijn, te kiezen, zoodanig, dat

voor alle punten van	A	$l_2 \geqq 0,\ l_3 \leqq 0,$
,, ,, ,, ,,	B	$l_3 \geqq 0,\ l_1 \leqq 0,$
,, ,, ,, ,,	C	$l_1 \geqq 0,\ l_2 \leqq 0$

is, terwijl voor minstens één punt van R_n

$$l_1 \geqq 0,\ l_2 \geqq 0,\ l_3 \geqq 0$$

is.